גבולות (המשך)

$\bar{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) : I \to \mathbb{R}^n$

מסלול ב- $\mathbb{R}^n$.

נקרא מ- $\mathbb{R}$

$\bar{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

מעגל מרכזו $(0,0)$ R עבור כדור השדות, עיין

אותה

$\pi/2 \le t \le 0$ מעגל מרכזו $(0,0)$ R, עבור כיוון

השעון, עיין.

- גבולות של מסלולים:

$$\lim_{t \to t_0} \bar{r}(t) = \bar{v}$$

אם $\lim_{t \to t_0} \underbrace{|\bar{r}(t) - \bar{v}|}_{\text{מרחק אקלידי}} = 0$

הגדרה:

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim_{x \to x_0} f(x) = L \\ \Updownarrow \\ \lim_{x \to x_0} |f(x) - L| = 0 \end{array}}$$

$$|\bar{r}(t) - \bar{v}| = |(x_1(t), \dots, x_n(t)) - (v_1, \dots, v_n)| =$$

$$= |(x_1(t) - v_1, \dots, x_n(t) - v_n)| =$$

$$= \sqrt{(x_1(t) - v_1)^2 + \dots + (x_n(t) - v_n)^2} \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$$

זה שקול ל- $\lim_{t \to t_0} x_1(t) = v_1, \dots, \lim_{t \to t_0} x_n(t) = v_n$

- עוד אומר כי $\bar{r}(t)$ רציף ב- t_0 אם

$$\lim_{t\to t_0} \bar{r}(t) = \bar{r}(t_0).$$

גם קורה $\iff$ $x_1(t),\dots,x_n(t)$ רציפים ב- t_0.

- $$\frac{\bar{r}(t)-\bar{r}(t_0)}{t-t_0} = \left(\frac{x_1(t)-x_1(t_0)}{t-t_0},\dots,\frac{x_n(t)-x_n(t_0)}{t-t_0}\right)$$

עוד אומר כי $\bar{r}(t)$ גזיר ב- t_0 אם

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\bar{r}(t)-\bar{r}(t_0)}{t-t_0}$$

קיים, ומתקיים נסמן

$$\bar{r}'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\bar{r}(t)-\bar{r}(t_0)}{t-t_0}.$$

$\bar{r}(t)$ גזיר ב- t_0 $\iff$ $x_1(t),\dots,x_n(t)$ גזירים ב- t_0, ואז $\bar{r}'(t_0) = (x_1'(t_0),\dots,x_n'(t_0))$.

למשל.

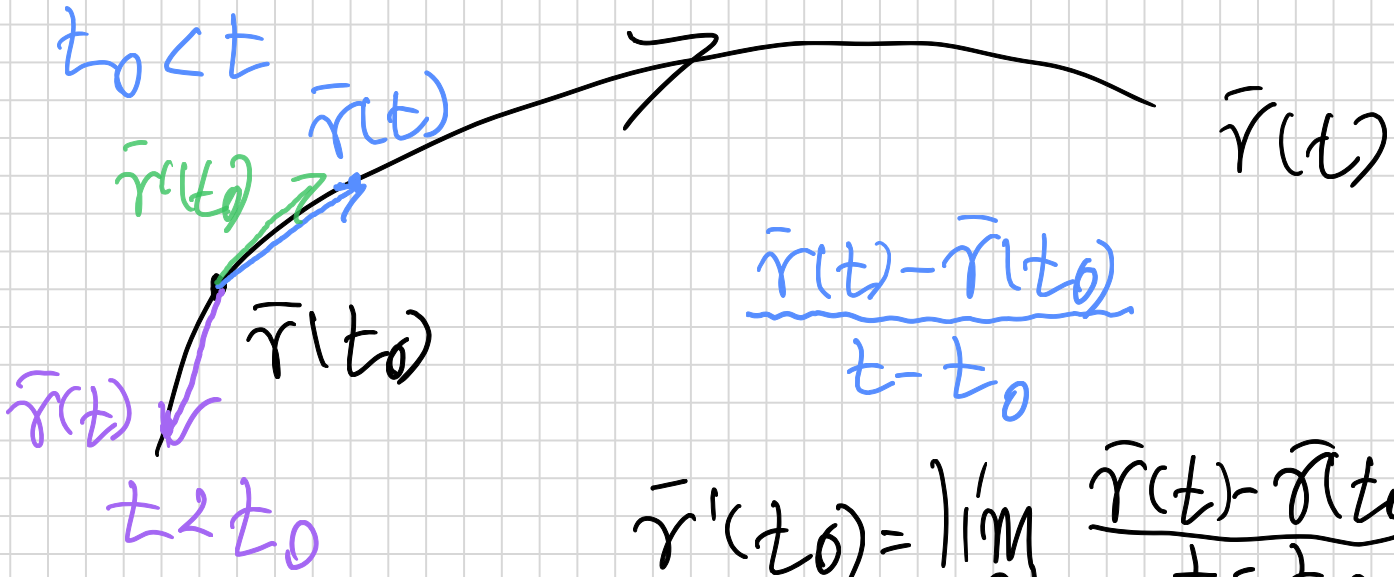
$$\bar{r}(t) = (t^2, \cos t)$$

$$\bar{r}'(t) = (2t, -\sin t)$$

- כל המינימום של רציפות מקבל

וגזירות מקבל "עוד יום".

גזירה: נניח $\bar{r}(t)$ גזירה ב- t_0, ופי



$$\frac{\bar{r}(t)-\bar{r}(t_0)}{t-t_0}$$

$$\bar{r}'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\bar{r}(t)-\bar{r}(t_0)}{t-t_0}$$

אם $\bar{r}'(t_0)\neq\bar{0}$ אז יש כיוון משיק

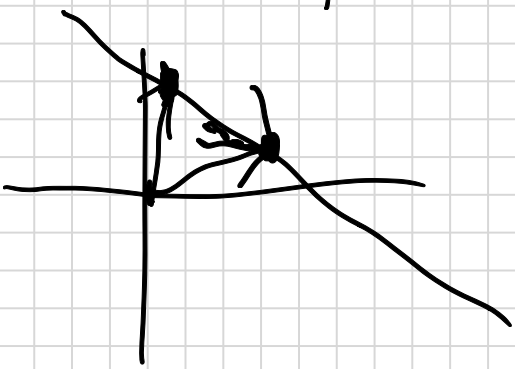
ואם נרצה את הישר המשיק הינו

$$\bar{r}(t_0)+\bar{r}'(t_0)\cdot(t-t_0)$$

הצגה פרמטרית של הישר המשיק

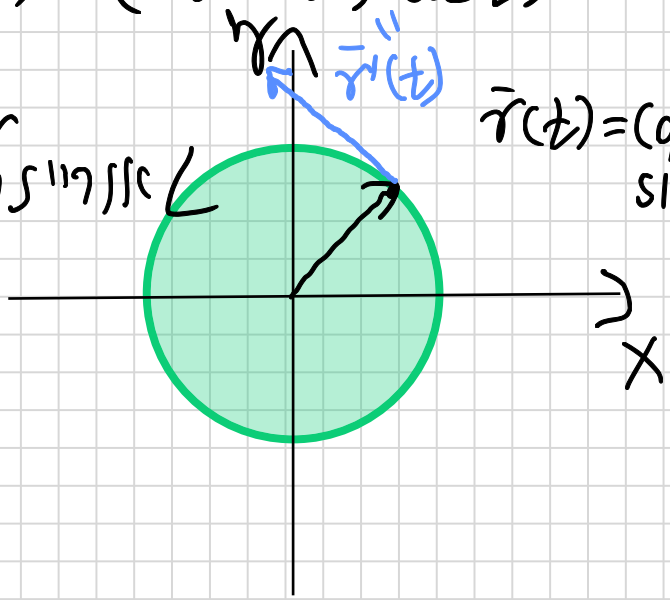
אם $\bar{r}'(t_0)=\bar{0}$ אין כיוון משיק למעט

מ- $\bar{r}(t)$.



למשל: $\bar{r}(t)=(\cos t,\sin t)$

$\bar{r}'(t)=(-\sin t,\cos t)$

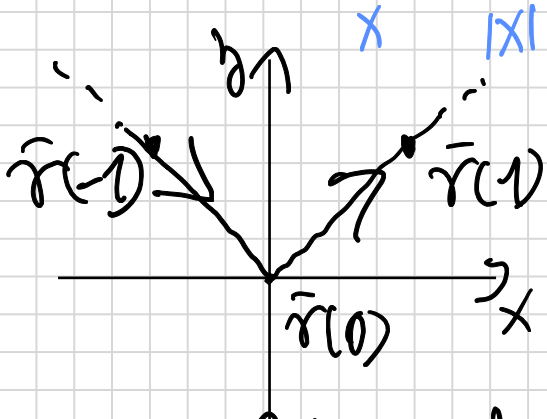


אנרמל לכיוון (נלב כיוון המשיק)

- נאמר כי הגרף פרמטרי $\bar{r}(t),\ t\in I$ הינו חלק אם $\bar{r}(t)$ גזירה מ- I, ו- $\bar{r}'(t)\neq\bar{0}$ לכל $t\in I$.

למשל:

$$\bar{r}(t)=(t^3,|t|^3)$$



$$\bar{r}'(t)=(3t^2,3\cdot|t|^2\cdot\mathrm{sign}(t))$$

לכל t (כולל $t=0$).

$$\bar{r}'(0)=(0,0)$$

אינו חלק.

$$\mathrm{sign}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t=0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

- נאמר כי הגרף פרמטרי $\bar{r}(t),\ t\in[a,b]$ הינו חלק למקוטעין אם $\bar{r}(t)$ רציפה מ- $[a,b]$, ו- $\bar{r}'(t)$ רציפה למקוטעין מ- $[a,b]$, ו- $\bar{r}'(t)\neq\bar{0}$ פרט למספר סופי של נקודות.

4. משטחים: הגדרה פרמטרית של משטח היא: $\bar{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)):\underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{D}}\to\mathbb{R}^3$

לדוגמא: $\bar{r}(u,v)=(u^2v, u\cos(uv), e^{u^2+v^2})$.

לדוגמא: $\bar{r}(u,v)=\underbrace{(x_0,y_0,z_0)}+u(x_1,y_1,z_1)+$
$+v(x_2,y_2,z_2)$

טופולוגיה מסוימת

הגדרות:

1. יהי $M_0\in\mathbb{R}^n$ ו- r סקלר.

הכדור הסגור (הפתוח) עם מרכז M_0 ורדיוס r

$$\bar{B}(M_0,r)=\{M\in\mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{M_0M}|\le r\}$$

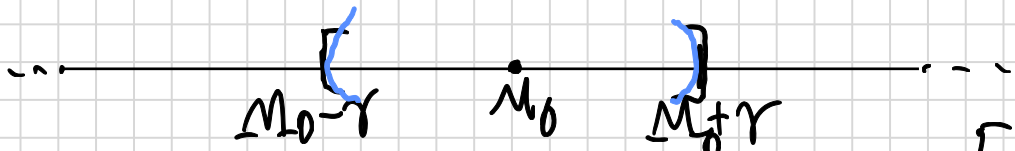
$$B(M_0,r)$$

הספירה עם מרכז M_0 ורדיוס r

$$S(M_0,r)=\{M\in\mathbb{R}^n \mid |\overrightarrow{M_0M}|=r\}$$

הערה: ה- $\bar{B}(M_0,r)$ הינו מעל B אינו סימון של נקודה.

$n=1$:

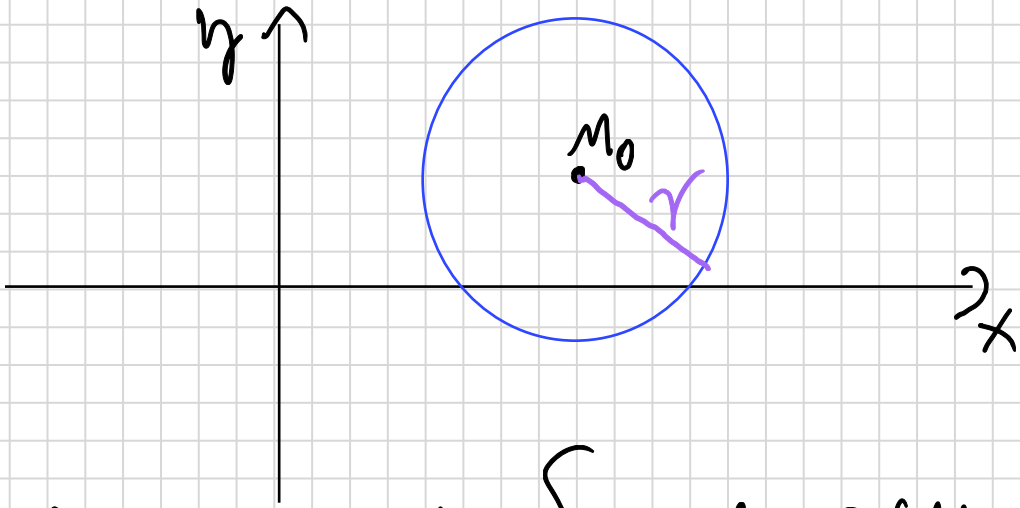


$(M_0-r, M_0+r) = B(M_0,r)$

$[M_0-r, M_0+r] = \bar{B}(M_0,r)$

$$S(M_0,r)=\{M_0+r, M_0-r\}$$

$n=2$:

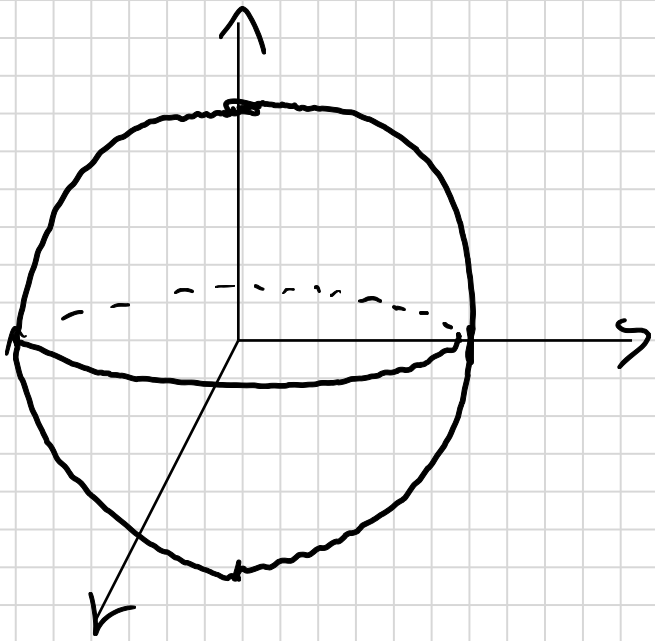


$B(M_0,r)$ זה כל מה שמסומן, פלוס המעגל.

$\bar{B}(M_0,r)$ זה כל המסומן כולל המעגל

$S(M_0,r)$ זה המעגל

$n=3$:



הערה: $\bar{B}(M_0,r)=B(M_0,r)\cup S(M_0,r)$

איחוד זר.

2. תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהי $M_0\in A$.

נאמר כי M_0 היא נקודה פנימית של A אם קיים סביב שמאלו $B(M_0,r)\subseteq A$.

- אוסף כל הנקודות הפנימיות של A מסומן $\mathring{A}$, $\mathrm{int}(A)$.

עסוקטמזו

- נאמר כי A הינה פתוחה אם כל נקודה של A הינה נקודה פנימית, כלומר $\mathrm{int}(A)=A$.

3. תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי $M_0\in\mathbb{R}^n$.
(M_0 לא חייב להיות ב-A). $[0,1)$.
נאמר כי M_0 הינו נקודת שפה של A אם לכל $r>0$ מתקיים
$B(M_0,r)\cap A\neq\emptyset$, $B(M_0,r)\cap A^c\neq\emptyset$

$A^c = \{x \mid x\notin A\}$

המילים, לכל כדור ל-$B(M_0,r)$ יש לפחות נקודה מ-A ויש לפחות נקודה שאינה מ-A.

- אוסף נקודות השפה של A מסומן ∂A ונקרא השפה של A.

- נאמר כי A קבוצה סגורה אם $\partial A\subseteq A$.

- הסגור של קבוצה A הינו הקבוצה $A\cup\partial A$, והינו מסומן $\bar{A}$.

הגדרה: $\partial B(M_0,r)=S(M_0,r)$.